EXAMEN TEMA 1. Sucesiones, series

1. *(2 ptos.)* Dar el radio de convergencia, intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n}(x+2)^n$$

SOLUCIÓN:

Calculemos con la fórmula del cociente su radio de convergencia, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h_{n+1}}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,(n+1)^n}{n!\,(n+2)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = 1^\infty$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{-n}{n+2}} = e^{-1} = \frac{1}{R}$$

Por lo que el radio de convergencia vale R=e y el intervalo de convergencia es

I= $(-2-e, -2+e)$.

2. *(2 ptos.)* Estudiar la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)!-n!}{4^n}$$

SOLUCIÓN:
Al tratarse de una STP podemos usar el criterio del cociente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+1)!-n!}\frac{4^n}{4^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+2)-1](n+1)!}{[(n+1)-1]n!}\frac{1}{4}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)!}{n\,n!} = \frac{1}{4}\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n} = \infty$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty > 1$$

Y la serie dada es divergente.

3.(2 ptos.) Calcular el límite de la sucesión con término general:

$$a_n = \frac{\ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2+1}$$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+1)+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{2n+1} = \frac{0}{\infty} = 0$$

Aplicando el criterio de Stolz, al ser la sucesión del denominador m.c. con límite infinito

$$n^2+1 < (n+1)^2+1, \forall n \in \mathbb{N}$$

4. (2 ptos.) Sumar la serie *(1 pto.)*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$$

SOLUCIÓN:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)},$$

Pero $\frac{1}{(n+4)(n+5)} = \frac{1}{(n+4)} - \frac{1}{(n+5)}$

Calculamos, a partir de aquí las sumas parciales sucesivas

$$S_1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}, S_2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{5} - \frac{1}{7}, S_3 = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = \frac{1}{5} - \frac{1}{8}, \ldots,$$

$$S_N = \frac{1}{5} - \frac{1}{(N+5)}$$

Con lo que la suma de la serie vale $\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{5} - \frac{1}{(N+5)} = \frac{1}{5}$

5. *(2 ptos.)* Siendo α y β dos números reales, encontrar qué valores de los mismos igualan estos límites,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+\alpha}{n+1}\right)^{3n+\alpha} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n\beta}$$

SOLUCIÓN:

Calculamos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+\alpha}{n+1}\right)^{3n+\alpha} = 1^{\infty} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha-1}{n+1}\right)(3n+\alpha)} = e^{3\alpha-3}$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n\beta} = 1^{\infty} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2}\right)n\beta} = e^{\beta}$$

Para que ambos límites sean iguales, habrá de ser $\beta = 3\alpha - 3$

EXAMEN TEMA 1. Sucesiones, series

1. *(2 ptos.)* Dar el radio de convergencia, intervalo de convergencia de la serie de potencias

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln n}(x+1)^n$$

$$obs.\, recuerde\ que\ a = e^{\ln a}$$

SOLUCIÓN:

Calculemos con la fórmula de Cauchy su radio de convergencia, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(e^{\ln n}\right)^{\ln n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{(\ln n)^2}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2}{n}} = 1^{\infty}, \text{ pero}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2\ln x}{x}}{1} = \frac{\infty}{\infty} = 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Entonces será $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{\ln n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(\ln n)^2}{n}} = e^0 = 1$

Por lo que el radio de convergencia vale R=1 y el intervalo de convergencia es $(-2,0)$.

2. *(2 ptos.)* Estudiar la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!-n!}$$

SOLUCIÓN:

Al tratarse de una STP podemos usar el criterio del cociente, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!-n!}{(n+2)!-(n+1)!}\,\frac{2^{n+1}}{2^n} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)-1]n!}{[(n+2)-1](n+1)!}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{n\,n!}{(n+1)(n+1)!} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)^2} = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$$

Y la serie dada es convergente.

3. *(2 ptos.)* Calcular el límite de la sucesión con término general:

$$a_n = \frac{\ln(1+2) + \ln(1+2^2) + \cdots + \ln(1+2^n)}{n}$$

SOLUCIÓN:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+2)+\ln(1+2^2)+\cdots+\ln(1+2^n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+2^{n+1})}{1} = \infty$$

Aplicando el criterio de Stolz, al ser la sucesión del denominador m.c. con límite infinito

$n < n+1, \forall n \in \mathbb{N}$

4. *(2 ptos.)* Siendo α y β dos números reales, encontrar qué valores de los mismos igualan estos límites,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\alpha n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+\beta}\right)^{n\beta}$$

SOLUCIÓN:

Calculamos

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\alpha n+1} = 1^\infty = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{n+2}\right)(\alpha n+1)} = e^{-\alpha}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+\beta}\right)^{n\beta} = 1^\infty = e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\beta}{n+\beta}\right)n\beta} = e^{\beta(1-\beta)}$$

Para que ambos límites sean iguales, habrá de ser $-\alpha = \beta(1-\beta)$

5. *(2 ptos.)* Sumar la serie *(1 pto.)*

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$$

SOLUCIÓN:

$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)n},$

Pero $\frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Entonces S=$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Calculamos, a partir de aquí las sumas parciales sucesivas

$$S_1 = 1 - \frac{1}{2}, S_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, S_3 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \ldots, ,\ldots.$$

$$S_N = 1 - \frac{1}{N+1}$$

Con lo que la suma de la serie vale $\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$